Soluzioni 2º secupero di Analisi Matematica II (primi cinque crediti)
Ingegneria Elettronica; 9–12–06

Problema n.1 In tutti i casi si trattava di una forma esatta il cui potenziale era $U(x,y) = ax^2y^2 + bx^2 + cy^2 + \arctan\sqrt{x^2+y^2}$ e quindi bastava calcolare $U(x_{fin}, y_{fin}) - U(x_{in}, y_{in})$ ottenendo: (A $\frac{3}{32}$) (B $\frac{3}{4}$) (C $-\frac{3}{8}$) (D $\frac{1}{8}$). Si poteva calcolare direttamente l'integrale curvilineo ma era certamente più lungo.

La forma è esatta anche se l'insieme su cui è definita NON è semplicemente connesso. Il teorema che alcuni studenti hanno maldestramente applicato è: forma chiusa e insieme semplicemente connesso implicano forma esatta ma se una forma è chiusa e l'insieme di definizione NON è semplicemente connesso, la forma può benissimo essere esatta come nel presente caso

Problema n.2 Ogni problema presentava due coni del tipo $z = a - \sqrt{bx^2+cy^2}$ e $z = \xi a - \xi\sqrt{bx^2+cy^2}$ con $\xi > 1$. Il volume era quindi $\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\, \rho \frac{1}{\sqrt{bc}} \int_{a-\rho}^{\xi a - \xi\rho} dz$ da cui (A $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$) (B $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$) (C $\frac{\pi}{6}$) (D $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$)

Problema n.3 Applicando il Teorema di Gauss si devono calcolare rispettivamente i quattro integrali $\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\, \rho\sqrt{bc} \int_{a-\rho}^{\xi a-\xi\rho} dz(x+1)$, $\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\, \rho \frac{1}{\sqrt{bc}} \int_{a-\rho}^{\xi a-\xi\rho} dz(1+y)$, $\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\, \rho\sqrt{bc} \int_{a-\rho}^{\xi a-\xi\rho} dz(y+1)$, $\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\rho\, \rho\sqrt{bc} \int_{a-\rho}^{\xi a-\xi\rho} dz(1+z)$ e quindi (A $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$) (B $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$) (C $\frac{\pi}{6}$) (D $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$)

Problema n.4 A. Si ha solamente $a_{2k+1} = \dfrac{-8}{\pi((2k+1)^2-4)} = \dfrac{-8}{\pi(4k^2+4k-3)}$. La serie converge uniformemente su tutta la retta. Ciò lo si può vedere sia dal fatto che la funzione è derivabile con derivata continua in tutti i punti tranne quelli della forma $k\pi$. In tali punti la funzione non è derivabile ma esistono le derivarte destra e sinistra finite e questo basta per avere uniforme convergenza. Un altro modo di vere la uniforme convergenza è osservare che $|a_{2k+1}| \leq C/k^2$ (con C costante opportuna) e quindi la serie converge uniformemente.

B. $b_{2k+1} = \dfrac{4(2k+1)}{\pi(4k^2+4k-3)}$. La convergenza non è uniforme su nessuno degli intervalli richiesti. Ovviamente i coefficienti non possono verificare la relazione $|b_k| \leq C/k^2$ ed infatti si ha $|b_k| \leq C/k$.

C. $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{2k} = \dfrac{-2}{\pi(4k^2-1)}$. La serie converge uniformemente su tutta la retta.

D. $a_k = \dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}$. La serie converge uniformemente su tutta la retta.

Problema n.5 A.

La formula risolutiva è $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k''+a^2k^2u_k) = \sin x+\sin(2x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at+\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin kx = (A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2+\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x+\sin 2x$. L'unica possibilità è che $A_1=\frac{a^2-1}{a^2}$ e $A_2=\frac{4a^2-1}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_2=\frac{1}{2a}$, Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t)=\frac{a^2-1}{a^2}\sin x\cos at+\frac{1}{a^2}\sin x+\frac{4a^2-1}{4a^2}\sin(2x)\cos(2at)+\frac{1}{4a^2}\sin(2x)+\frac{1}{2a}\sin(2x)\sin(2at)$

Problema n.5 B. La formula risolutiva è $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k''+a^2k^2u_k) = \sin x+\sin(2x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=-1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at-\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin kx = (A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2-\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum\limits_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x-\sin 2x$. L'unica possibilità è che $A_1=\frac{a^2-1}{a^2}$ e $A_2=\frac{1-4a^2}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Sui B_k la condizione imposta da $u_t(x,0)$ è $B_2=\frac{1}{2a}$. Tutti gli altri valgono zero. Alla fine la soluzione è $u(x,t)=\frac{a^2-1}{a^2}\sin x\cos at+\frac{1}{a^2}\sin x+\frac{1-4a^2}{4a^2}\sin(2x)\cos(2at)-\frac{1}{4a^2}\sin(2x)+\frac{1}{2a}\sin(2x)\sin(2at)$

Problema n.5 C. La formula risolutiva è $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sin kx(u_k''+a^2k^2u_k) = \sin x+\sin(2x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at+\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin kx=(A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2+\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin 3x$. L'unica possibilità è che $A_1=-\frac{1}{a^2}$ e $A_2=-\frac{1}{4a^2}$, $A_3=1$. Tutti gli altri A_k valgono zero per cui $u(x,t)=\frac{1}{a^2}\sin x(1-\cos(at))+\frac{1}{4a^2}\sin(2x)(1-\cos(2at))+\sin(3x)\cos(3at)+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\sin(kx)\sin(kat)$. $u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}B_kka\sin(kx)=\sin x+\sin(2x)$ da cui $B_1=\frac{1}{a}$, $B_2=\frac{1}{2a}$ $B_k=0$ se $k>2$. Alla fine $u(x,t)=\frac{1}{a^2}\sin x(1-\cos(at))+\frac{1}{4a^2}\sin(2x)(1-\cos(2at))+\sin(3x)\cos(3at)+\frac{1}{a}\sin(x)\sin(at)+\frac{1}{2a}\sin(2x)\sin(2at)$.

Problema n.5 D. La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k)=\sin x+\sin(2x)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at+\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin kx=(A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2+\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x$. L'unica possibilità è che $A_1=\frac{a^2-1}{a^2}$ e $A_2=-\frac{1}{4a^2}$. Tutti gli altri A_k valgono zero. Quindi abbiamo $u(x,t)=(\frac{a^2-1}{a^2}\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2})\sin x+(-\frac{1}{4a^2}\cos 2at+B_2\sin 2at+\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}B_k\sin(kx)\sin(kat)$. La condizione iniziale sulla derivata prima dà $\sum_{k=1}^{+\infty}kaB_k\sin(kx)=\sin 2x+\sin(3x)$ e quindi $B_2=\frac{1}{2a}$ e $B_3=\frac{1}{3a}$. Gli altri B_k sono nulli. Alla fine la soluzione è $u(x,t)=(\frac{a^2-1}{a^2}\cos at+\frac{1}{a^2})\sin x+(-\frac{1}{4a^2}\cos 2at+\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\frac{1}{2a}\sin 2x\sin(2at)+\frac{1}{3a}\sin(3x)\sin(3at)$

Problema n.6 A.

La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k)=\sin x-\sin(2x)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=-1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at-\frac{1}{4a^2}$

se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(0)\sin kx = (A_1+\frac{1}{a^2})\sin x + (A_2-\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x\sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\stackrel{\text{def}}{=} g(x)$. Ora la funzione $g(x)$ deve essere estesa in modo dispari all'intervallo $[-\pi,0]$ e poi bisogna trovarne la serie di Fourier. Gli unici coefficienti di Fourier non nulli sono $b_{2k}=\frac{16k}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}$ da cui $g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} b_{2k}\sin(2kx)$. Otteniamo $A_1+\frac{1}{a^2}=0$, $A_2-\frac{1}{4a^2}=b_2$, $A_{2k}=b_{2k}$, $A_{2k+1}=0$. $u_t(x,0)=-aB_1\sin x+2aB_2\sin 2x+\sum_{k=3}^{+\infty} akB_k\sin kx$ e deve essere uguale a $\sin 2x$ da cui $B_2=\frac{1}{2a}$ e tutti gli altri zero. Mettendo assieme i vari pezzi si ha $u(x,t)=\frac{1}{a^2}\sin x(1-\cos(at))+\frac{1}{4a^2}(\cos(2at)-1)\sin(2x)+b_2\cos(2at)\sin(2x)+\frac{1}{2a}\sin(2at)\sin(2x)+\sum_{k=2}^{+\infty}\sin(2kx)\frac{16k}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}$

Problema n.6 B. La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k)=\sin x+\sin(2x)=\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at+\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin kx=(A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2+\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\stackrel{\text{def}}{=}g(x)$. Ora la funzione $g(x)$ deve essere estesa in modo dispari all'intervallo $[-\pi,0]$ e poi bisogna trovarne la serie di Fourier. Gli unici coefficienti di Fourier non nulli sono $b_{2k}=\frac{16k}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}$ da cui $g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_{2k}\sin(2kx)$. Otteniamo $A_1+\frac{1}{a^2}=0$, $A_2+\frac{1}{4a^2}=b_2$, $A_{2k}=b_{2k}$, $A_{2k+1}=0$. $u_t(x,0)=-aB_1\sin x+2aB_2\sin 2x+\sum_{k=3}^{+\infty}akB_k\sin kx$ e deve essere uguale a $\sin 2x$ da cui $B_2=\frac{1}{2a}$ e tutti gli altri zero. Mettendo assieme i vari pezzi si ha $u(x,t)=\frac{1}{a^2}\sin x(1-\cos(at))+\frac{1}{4a^2}(1-\cos(2at))\sin(2x)+b_2\cos(2at)\sin(2x)+\frac{1}{2a}\sin(2at)\sin(2x)+\sum_{k=2}^{+\infty}\sin(2kx)\cos(2akt)\frac{16k}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}$

Problema n.6 C. La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k)=\sin x-\sin(2x)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=-1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at-\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin kx=(A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2-\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin 3x$ ossia $A_1=-\frac{1}{a^2}$, $A_2=-\frac{1}{4a^2}$ e $A_3=1$. Per l'altra condizione iniziale bisogna che $\sin x\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\stackrel{\rm def}{=}g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kaB_k\sin(kx)$. Ora la funzione $g(x)$ deve essere estesa in modo dispari all'intervallo $[-\pi,0]$ e poi bisogna trovarne la serie di Fourier. Gli unici coefficienti di Fourier non nulli sono $b_{2k}=\frac{16k}{\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}$ da cui $g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}b_{2k}\sin(2kx)$. Otteniamo $2kaB_{2k}=b_{2k}$, $B_{2k+1}=0$. Mettendo assieme i vari pezzi si ha $u(x,t)=\frac{1}{a^2}\sin x(1-\cos(at)+\frac{1}{4a^2}(\cos(2at)-1)\sin(2x)+\cos(3at)\sin(3x)+\sum_{k=2}^{+\infty}8\frac{\sin(2kx)\sin(2kat)}{a\pi(4k^2-1)(4k^2-9)}$

Problema n.6 D. La formula risolutiva è $\sum_{k=1}^{+\infty}\sin kx(u_k''+a^2k^2u_k)=\sin x-\sin(2x)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(t)\sin kx$ dove $f_k(t)=0$ se $k\neq 1,2$ e $f_1(t)=1$, $f_2(t)=-1$. Se $k\neq 1,2$ la soluzione è $u_k(t)=A_k\cos akt+B_k\sin akt$ mentre se $k=1$ la soluzione è $u_1(t)=A_1\cos at+B_1\sin at+\frac{1}{a^2}$ e $u_2(t)=A_2\cos 2at+B_2\sin 2at-\frac{1}{4a^2}$ se $k=2$. La soluzione è quindi $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin kx$ dove le $u_k(t)$ sono quelle date. Per le condizioni inziali abbiamo $u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(0)\sin kx=(A_1+\frac{1}{a^2})\sin x+(A_2-\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=3}^{+\infty}\sin kxA_k$ e questa espressione deve essere uguale alla funzione $\sin x$ ossia $A_1=\frac{1-a^2}{a^2}$, $A_2=\frac{1}{4a^2}$ e $A_k=0$ se $k\neq 1,2$ da cui finora $u(x,t)=(\frac{1-a^2}{a^2}\cos at+\frac{1}{a^2})\sin x+(\frac{1}{4a^2}\cos 2at-\frac{1}{4a^2})\sin(2x)+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\sin(kx)\sin(akt)$

Per l'altra condizione iniziale si ha $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\stackrel{\rm def}{=}g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}kaB_k\sin(kx)$. Ora la funzione $g(x)$ deve essere estesa in modo dispari all'intervallo $[-\pi,0]$ e poi bisogna trovarne la serie di Fourier. Gli unici coefficienti di Fourier non nulli sono $b_{2k+1} = -\dfrac{24(2k+1)}{\pi(4k^2+4k-3)(4k^2+4k-15)}$ da cui $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1}\sin(2k+1)x)$. Otteniamo $(2k+1)aB_{2k+1} = b_{2k+1}$, $B_{2k} = 0$. Si ha $u(x,t) = (\dfrac{1-a^2}{a^2}\cos at + \dfrac{1}{a^2})\sin x + (\dfrac{1}{4a^2}\cos 2at - \dfrac{1}{4a^2})\sin(2x) + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{b_{2k+1}}{a(2k+1)}\sin((2k+1)x)\sin(a(2k+1)t)$